Matemática - Curso de Nivelación 2023 - Etapa II - UNS

Segunda Evaluación - 06/07/2023 - Tema 1

Ejercicio 1:

Considerar la recta L de ecuación $2x - 3y = 4$.

1. Indicá cuáles de los siguientes puntos pertencen a L. (Puede haber más de una respuesta correcta.) /4

(a) $\boxed{X}$ $(5+3\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$
(c) $\boxed{}$ $(6, 11)$
(b) $\boxed{X}$ $(11, 6)$
(d) $\boxed{}$ $(2, -3)$

Desarrollo: Para saber si un punto $P = (a, b)$ pertenece a una recta, debemos reemplazar en la ecuación de la recta y ver si se verifica la igualdad. El primer elemento a se reemplaza en el lugar de x y el segundo elemento b se reemplaza en el lugar de y. Así, por ejemplo, tomamos el primer punto $P = (5+3\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ y reemplazamos $x = 5 + 3\sqrt{2}$ e $y = 2 + 2\sqrt{2}$ en la expresión $2x - 3y$ para ver si obtenemos como resultado 4,

$$2(5+3\sqrt{2}) - 3(2+2\sqrt{2}) = 10 + \cancel{6\sqrt{2}} - 6 - \cancel{6\sqrt{2}} = 4.$$

Concluimos entonces que la recta pasa por el punto dado, o lo que es lo mismo es un punto que pertenece a L.

De la misma forma se reemplazan los restantes puntos y se encuentra que solo $(5+3\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ y $(11, 6)$ pertenecen a L.

2. Indicá cuáles de las siguientes rectas son paralelas a L. (Puede haber más de una respuesta correcta.) /8

(a) $\boxed{X}$ $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$
(c) $\boxed{}$ $3x + 2y = 4$
(b) $\boxed{X}$ $6x = 12 + 9y$
(d) $\boxed{}$ $y = -\frac{2}{3}x$

Desarrollo: Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente. La pendiente es el coeficiente que multiplica a x cuando la recta está dada de la forma explícita: $y = ax + b$ (a es la pendiente).

La recta L dada puede expresarse como

$$2x - 3y = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{4-2x}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Entonces, en cada caso despejamos y para encontrar la pendiente de cada recta y ver si es igual a $\frac{2}{3}$. Sólo los incisos a) y b) corresponden a rectas paralelas a L.

3. Los puntos en los que la recta L intersecta a los ejes coordenados son: /6

(a) $\boxed{}$ $(2, -\frac{4}{3})$
(c) $\boxed{X}$ $(2, 0)$ y $(0, -\frac{4}{3})$
(b) $\boxed{}$ $(-\frac{4}{3}, 0)$ y $(0, 2)$
(d) $\boxed{}$ Ninguna de los anteriores.

Desarrollo: Para encontrar la intersección de L con el eje X, reemplazamos con $y = 0$ en su ecuación y despejamos el valor de x:

$$2x - 3 \cdot 0 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Entonces, el punto de intersección entre L y el eje X es $(2, 0)$. Para encontrar la intersección de L con el eje Y, reemplazamos con $x = 0$ en su ecuación y despejamos el valor de y:

$$2 \cdot 0 - 3y = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}.$$

Entonces, el punto de intersección de L con el eje Y es $(0, -\frac{4}{3})$.

4. La intersección entre L y $L' : 3y - x + 3 = 0$ es: /6

(a) ☐ la recta L.
(b) ☒ el punto $(1, -\frac{2}{3})$
(c) ☐ el punto $(-\frac{2}{3}, 1)$
(d) ☐ vacía.

Desarrollo: La intersección entre ambas rectas se encuentra resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3y - x + 3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta inmediatamente

$$x = 3y + 3. \tag{1}$$

Con esta expresión reemplazamos en la primera ecuación y encontramos

$$\begin{aligned} 2(3y + 3) - 3y = 4 \quad \Longrightarrow \quad & 6y + 6 - 3y = 4 \\ & 3y = -2 \\ & y = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

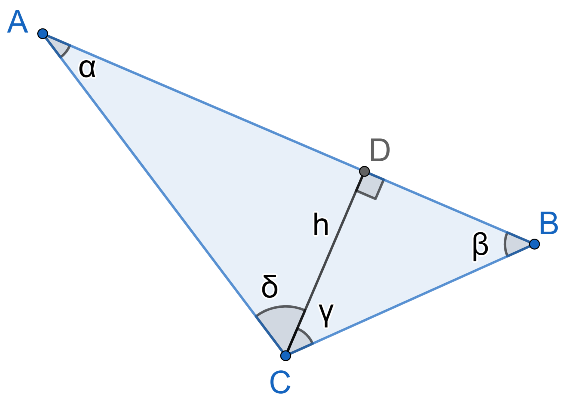
Con este valor reemplazamos en (1) y encontramos

$$x = 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 1.$$

Luego, la intersección entre ambas rectas es $(1, -\frac{2}{3})$.

Ejercicio 2:

Considerar el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura, donde $\alpha = 20°$, $\beta = 35°$ y $|\overline{BC}| = 5$ cm.



1. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. (Puede haber más de una respuesta correcta.) /8

(a) $\boxed{X}$ $\alpha + \delta = 90°$.

(b) $\boxed{}$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ radianes

(c) $\boxed{X}$ $\alpha = \frac{1}{9}\pi$ radianes

(d) $\boxed{}$ $\alpha = \frac{1}{18}\pi$ radianes

<u>Desarrollo:</u>

(a) El triángulo $\overset{\triangle}{ACD}$ es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el vértice D. Por propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo tenemos

$$\alpha + \delta + 90° = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \delta = 90°.$$

(b) Por propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo tenemos

$$\alpha + \delta + \gamma + \beta = 180° = \pi \text{ radianes}$$

de donde resulta que $\alpha+\beta+\gamma = \pi-\delta$. La única forma de que la afirmación sea verdadera es que sea $\delta = 0$. Si bien en el gráfico vemos que esto no es así, los gráficos deben tomarse como esquemas que pueden no ser del todo correctos por lo que es conveniente, siempre que se pueda, verificar matemáticamente las afirmaciones. En este caso tenemos el dato $\alpha = 20°$ y vimos en el primer inciso que $\alpha + \delta = 90°$, es decir que

$$\delta = 90° - \alpha = 90° - 20° \neq 0.$$

De esta forma concluimos que la afirmación no es verdadera.

(c) Planteamos y resolvemos la ecuación que nos permite encontrar la medida en radianes de un ángulo dado en el sistema sexagesimal:

$$\frac{20°}{180°} = \frac{x}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{20}{180}\pi = \frac{1}{9}\pi$$

Es decir, $\alpha = \frac{1}{9}\pi$.

(d) Se responde en función de lo encontrado en el inciso anterior.

2. Indica cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular la altura h. (Puede haber más de una respuesta correcta.) $\boxed{ /8}$

(a) $\boxed{X}$ $|\overline{BC}| \operatorname{sen}\beta$

(b) $\boxed{}$ $|\overline{BC}| \cos\beta$

(c) $\boxed{}$ $\dfrac{|\overline{BC}|}{\operatorname{sen}\beta}$

(d) $\boxed{}$ $\dfrac{|\overline{BC}|}{\operatorname{tg}\beta}$

<u>Desarrollo:</u> Notemos que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{|\overline{BC}|} \quad \Longrightarrow \quad h = |\overline{BC}| \operatorname{sen}\beta.$$

De acá concluimos que (a) es verdadera y (c) es falsa.

Ahora $\cos\beta = \frac{|\overline{DB}|}{|\overline{BC}|}$, por lo que la afirmación del inciso (b) es falsa.

Por último, $\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{|\overline{DB}|}$, de donde resulta que la afirmación del inciso (d) es falsa.

3. El segmento $\overline{BD}$ mide aproximadamente: $\boxed{ /8}$

(a) $\square$ 2,9 cm. (c) $\boxed{\text{X}}$ 4,1 cm.

(b) $\square$ 3,5 cm. (d) $\square$ 6,1 cm.

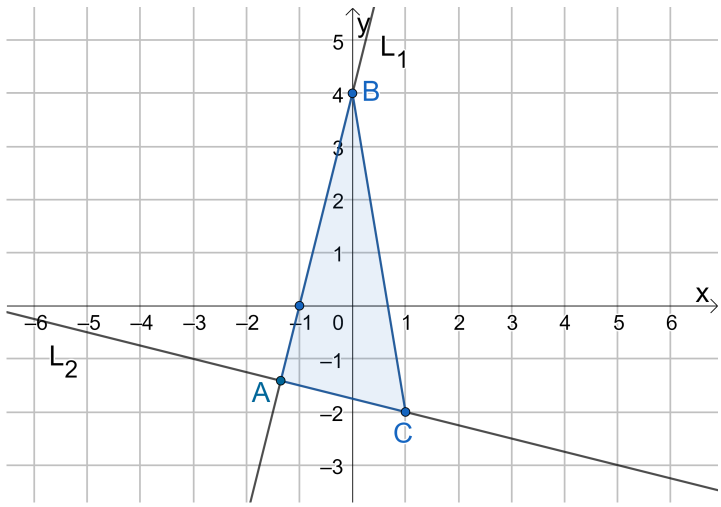
<u>Desarrollo:</u> Tenemos

$$\cos\beta = \frac{|\overline{DB}|}{|\overline{BC}|} \quad \Longrightarrow \quad |\overline{DB}| = |\overline{BC}|\cos\beta = (5\text{cm})\cdot\cos 35^\circ \sim 4,1\text{cm}.$$

Ejercicio 3:

Encontrar el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura a partir de los siguientes datos: /24

- La recta L_1 intersecta al eje de las abscisas en $(-1, 0)$ y al de las ordenadas en $B = (0, 4)$.



- La recta L_2 es perpendicular a L_1 y el punto $C = (1, -2)$ pertenece a L_2.

<u>Desarrollo:</u> El área del triángulo está dada por Área $= \frac{|\overline{AB}||\overline{AC}|}{2}$ por lo que necesitamos las medidas de los segmentos $|\overline{AB}|$ y $|\overline{AC}|$, las cuales podemos calcular mediante la fórmula de distancia entre dos puntos. Para esto, necesitamos encontrar las coordenadas del punto A. Este punto es la intersección entre L_1 y L_2.
Para encontrar la ecuación de L_1, tenemos la información de que corta al eje de las ordenadas en $B = (0, 4)$, es decir que la ordenada al origen es 4. Ádemás, pasa por $(-1, 0)$, entonces

$$L_1 : y = ax + 4 \quad \longrightarrow \quad 0 = a(-1) + 4 \quad \longrightarrow \quad a = 4.$$

Es decir, $L_1 : y = 4x + 4$. Ahora, L_2 es perpendicular a L_1, por lo que su pendiente es $-\frac{1}{4}$. Además, pasa por $C = (1, -2)$, por lo que

$$L_2 : y = -\frac{1}{4}x + b \quad \longrightarrow \quad -2 = -\frac{1}{4}1 + b \quad \longrightarrow \quad b = -\frac{7}{4}.$$

Es decir, $L_2 : y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$.
Ahora, para encontrar A resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{4} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 4x + 4 &= -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4} \\ 4x + \frac{1}{4}x &= -\frac{7}{4} - 4 \\ \frac{17}{4}x &= -\frac{23}{4} \\ x &= -\frac{23}{17} \end{aligned}$$

Con este valor de x reemplazamos en la primera de las ecuaciones y encontramos

$$y = 4\left(-\frac{23}{17}\right) + 4 = -\frac{24}{17}$$

y así $A = \left(-\frac{23}{17}, -\frac{24}{17}\right)$.
El siguiente paso es calcular la medida de los segmentos:

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}| &= d(A,B) = d\left(\left(-\frac{23}{17}, -\frac{24}{17}\right), (0,4)\right) \\
&= \sqrt{\left(0 - \left(-\frac{23}{17}\right)\right)^2 + \left(4 - \left(-\frac{24}{17}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{529}{17}} \sim 5,58 \\
|\overline{AC}| &= d(A,C) = d\left(\left(-\frac{23}{17}, -\frac{24}{17}\right), (1,-2)\right) \\
&= \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{23}{17}\right)\right)^2 + \left(-2 - \left(-\frac{24}{17}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{17}} \sim 2,43
\end{aligned}$$

Finalmente: Área $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{529}{17}}\sqrt{\frac{100}{17}} \sim 6,76.$

Ejercicio 4:

(a) Hallar la ecuación de la parábola que tiene por vértice el punto $(5,-4)$ y pasa por el punto $(3,-2)$. Graficar. /16

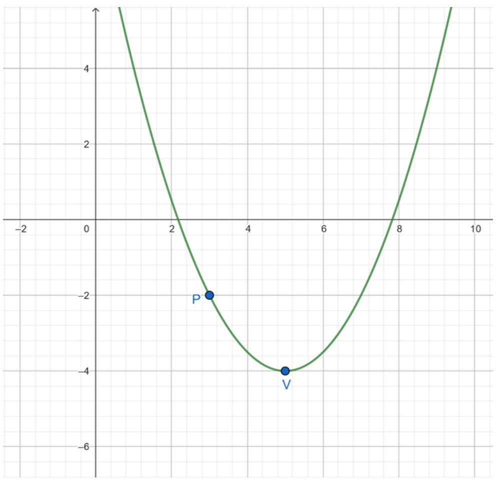
(b) ¿Para qué valores de m la parábola de ecuación $y = mx^2 + 4x + 2$ tiene dos raíces reales distintas? /12

Desarrollo:

1. Con el dato del vértice, sabemos que la parábola puede extresarse como $y = a(x-5)^2 - 4$. Usamos el punto $(3,-2)$ para terminar de encontrar la ecuación:

   $$-2 = a(3-5)^2 - 4 \quad \Longrightarrow \quad 2 = 4a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

   Así, la ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2}(x-5)^2 - 4$. Su gráfico se muestra a continuación.



2. En primer lugar, remarcamos que $m \neq 0$. Resolvemos

$$0 = mx^2 + 4x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot m \cdot 2}}{2m}.$$

Para que la ecuación tenga dos raíces reales distintas debe ser

$$16 - 8m > 0 \quad \Longrightarrow \quad m < 2.$$

Luego cualquier $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ es un valor para el cual la parárbola tiene dos raices reales distintas.